★★★

Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Eseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2005

■ Exercice Numéro 1 : (02,50 points)

Soit $x \wedge y$ le plus grand commun diviseur des nombres x et y.

Soit $\overline{abc}^{(x)}$ la représentation du nombre abc dans le système de numération à base x.

Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : (E) : $(x+1)^2 = 9 + 5y$.

0,50 **1 a** Montrer que : $(x, y)\ est\ solution\ de\ (E) \implies x \equiv 2\,[5] \quad ou \quad x \equiv 1\,[5]$.

0,50 **b** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

0,75 **2** Montrer que : $(\forall k \epsilon \mathbb{Z})$; $(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (k - 3) \wedge 8$.

0,75 **3** Résoudre dans $\mathbb{N}^{2*}$ le système suivant : $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1\,[5] \end{cases}$

■ Exercice Numéro 2 : (04,50 points)

I Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit : $(\mathcal{C}_m) = \left\{ M(x, y)\ \epsilon\ \mathcal{P} \quad ; \quad \left(\dfrac{x^2}{10 - m}\right) + \left(\dfrac{y^2}{2 - m}\right) = 1 \quad ; \quad m\ \epsilon\ \mathbb{R}\backslash\{2; 10\} \right\}$

1,00 **1** Discuter, selon les valeurs du paramètre m, la nature de la courbe $(\mathcal{C}_m)$

1,00 **2** Donner les caractéristiques de $(\mathcal{C}_m)$ dans le cas où $(\mathcal{C}_m)$ est une conique

0,25 **3** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

Soit l'équation : (E) : $z^2 - (6\cos\alpha)z + 1 + 8\cos^2\alpha = 0$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

0,50 **II 1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) tels que $\mathfrak{Im}(z_1) > 0$.

0,25 **2 a** Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan, montrer que $M_1\ \epsilon\ (\mathcal{C}_1)$.

0,75 **b** Montrer l'existence de deux points $P_1, P_2\ \epsilon\ \mathcal{P}$ tels que la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en chacun soit parallèle à (OM_1).

0,75 **c** Montrer que : $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$.

Exercice Numéro 3 : (02,50 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 20 .

Une urne contient dix boules blanches et $(n-10)$ boules noires, on suppose que toutes les boules sont indiscernable au toucher. On tire de cette urne une boule et on note sa couleur puis on la remets dans l'urne. On répète cette expérience aléatoire n fois. On note p_k la probabilité d'obtenir exactement k boules blanches $0 \leq k \leq n$.

0,50 **1** Calculer p_k en fonction de n et k .

0,50 **2 a** Montrer que : $\forall\, k \in [\![0\,;\,(n-1)]\!]$: $u_k := \dfrac{p_{k+1}}{p_k} = \left(\dfrac{n-k}{k+1}\right) \times \left(\dfrac{10}{n-10}\right)$

0,50 **b** Montrer les équivalences : $\begin{cases} 0 \leq k \leq 9 \iff u_k \geq 1 \\ 10 \leq k \leq n-1 \iff u_k \leq 1 \end{cases}$

1,00 **c** En déduire la plus grande valeur M de p_k quand $k \in \{0\,;1\,;\cdots;n\}$.

Montrer que : $M = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right) \times \left(\dfrac{10^{10}}{10!}\right) \times \left(\dfrac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}\right)$

Exercice Numéro 4 : (10,50 points)

I Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)\,e^{-2x}$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$.

0,50 **1 a** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 **b** Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,50 **2** Étudier les variations de la fonction f *sur* $\mathbb{R}$.

0,50 **3 a** Étudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,50 **b** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 **4 a** Montrer que f est solution de l'équation (E) : $y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$

0,50 **b** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) .

II Soit $\mathcal{A}_n$; $n \in \mathbb{N}^*$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et par les axes des abscisses et des ordonnées et par la droite d'équation $x = n$.

1,00 **1** Calculer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.

1,00 **2** Calculer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.

0,50 **3** Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{n\infty} \mathcal{A}_n$

III On pose : $u_n = n \int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$

0,75 **1** Montrer que : $u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\, dx \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad poser\ t = xn$

0,50 **2** **a** Montrer que : $\forall\, r \in [1\,;2] \quad ; \quad 2 - r \le \left(\frac{1}{r}\right) \le 1$

0,75 **b** En déduire que : $\begin{matrix} \forall\, x \in [0\,;n] \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \end{matrix} \quad ; \quad \left(x - \frac{x^2}{2n}\right) \le n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \le x$

0,50 **3** **a** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n \le \int_0^n e^{-x} dt$

0,75 **b** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad e^{\left(\frac{-1}{2\sqrt{n}}\right)} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x}\, dx \le u_n$

0,75 **c** En déduire que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est convergente, donner sa limite.

0,50 **4** **a** Montrer que : $\forall\, a \in]0,1[\quad ; \quad \int_a^1 n\left(f(x)\right)^n dx \le n(1-a)\left(f(a)\right)^n$

0,50 **b** En déduire que : $\forall\, a \in]0,1[\quad ; \quad \lim\limits_{n\infty} \int_a^1 n\left(f(x)\right)^n\, dx = 0$

0,50 **c** Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{n\infty} \int_0^a n\left(f(x)\right)^n\, dx \quad ; \quad \forall\, a \in]0,1[$